ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $x \in U$ και $v \in \mathbb{R}^n$ με $\|v\| = 1$. Το όριο

$$D_v f(x) := \frac{\partial f}{\partial v}(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+hv) - f(x)}{h}$$

λέγεται παράγωγος κατά κατεύθυνση v της f στο σημείο x

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $x \in U$, $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$ και f διαφορίσιμη στο $x \in U$ $\Longrightarrow$

$$\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial v}(x) = \nabla f(x) \cdot v$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Το U ανοικτό $x \in U$, $(\exists \varepsilon > 0)\ B(x, \varepsilon) \subseteq U \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall h \in (-\varepsilon, \varepsilon) : \underbrace{x + hv \in B(x, \varepsilon)}_{\|x+hv-x\| < \varepsilon \Leftrightarrow \|hv\| < \varepsilon \Leftrightarrow} \subseteq U$$

$$\Leftrightarrow |h| \cdot \|v\| < \varepsilon \Leftrightarrow |h| < \varepsilon \Leftrightarrow h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

Με αυτή τη συνάρτηση έχουμε $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+hv)-f(x)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(\varphi(h))-f(\varphi(0))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(f\circ\varphi)(h)-(f\circ\varphi)(0)}{h} = (f\circ\varphi)'(0)$$

$$= D(f(\varphi(0))) = Df(\varphi(0))\cdot D\varphi(0).$$

Η φ στο 0 διαφορίσιμη:

$$D\varphi(0)\; \varphi'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{x+hv-x}{h} = v \Rightarrow \varphi'(0) = v = D\varphi(0)$$

(να προσεχθεί ότι $\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(h)-\varphi(0)-vh}{|h|} = 0 = D\varphi(0)$)
δηλ. $D\varphi(0) = v$
σύμφωνα με τον ορισμό παραγώγου για $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$
εδώ $n=1$ και άρα (κανόνας Αλυσίδας)

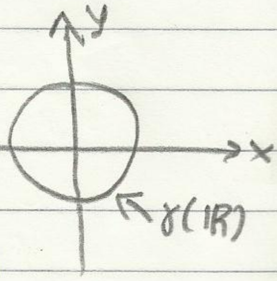
$$D(f(\varphi(0))) = Df(\varphi(0))\cdot D\varphi(0) = \nabla f(x)\cdot v$$

Παρατήρηση

Προοίμιο: Λίγα λόγια για καμπύλες στον $\mathbb{R}^n$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια συνάρτηση $\gamma: I\to\mathbb{R}^n$, όπου $I\subset\mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα $I=(a,\beta)$, όπου είναι συνεχής ονομάζεται παραμετρική καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$. Έχουμε, δηλ. $t\longmapsto \gamma(t) =$
$= \gamma(t) = \begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\ \vdots \\ \gamma_n(t)\end{pmatrix}$ με $\|\gamma(t_n)-\gamma(t)\|\to 0$ $\forall t_n\to t$

πχ



$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \subset \mathbb{R}^2, \quad t\in\mathbb{R}$$

Η εικόνα $\gamma(I)\subset\mathbb{R}^n$ ονομάζεται καμπύλη στο $\mathbb{R}^n$
Αντίστροφα ένα υποσύνολο $U\subset\mathbb{R}^2$ ονομάζεται καμπύλη εάν $\exists\, I\subseteq\mathbb{R}$ και $\gamma\in C(I)$ με $G(I)=U$
δηλ. αν υπάρχει συνεχής απεικόνιση από ένα $I\subseteq\mathbb{R}$ ανοικτό στο $\mathbb{R}^n$; $\gamma: I\to\mathbb{R}^n$ με $\gamma(I)=U$
Η πιο πάνω απεικόνιση $\gamma: I\to\mathbb{R}^n$ με $\gamma(I)=U$ ονομάζεται παραμετρικοποίηση της (καμπύλης) $U\subset\mathbb{R}^n$ και δεν είναι μοναδική πχ η $\tilde{\gamma}(t) = (\cos(\alpha t), \sin(\alpha t))$, $t\in\mathbb{R}$ $\alpha\neq 0$
δίνει $\tilde{\gamma}(\mathbb{R}) = U = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 = \gamma(\mathbb{R})\; x^2+y^2=1\}$